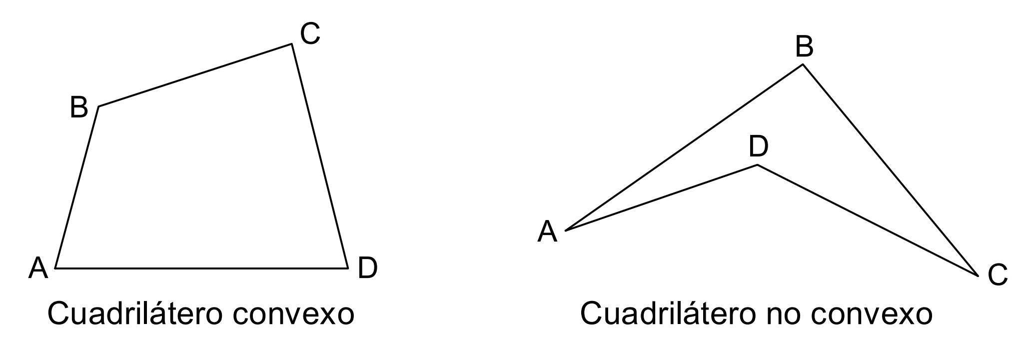
GEOMETRÍA

CUADRILÁTEROS

DEFINICIÓN: Es un polígono de cuatro lados. Considerando su interior puede ser convexo o no convexo.



Cuadrilátero convexo Cuadrilátero no convexo

DEFINICIONES: En todo cuadrilátero convexo se tiene

1. Dos lados de un cuadrilátero son opuestos, si no se intersecan.

2. Dos lados de un cuadrilátero son consecutivos, si tienen un extremo común.

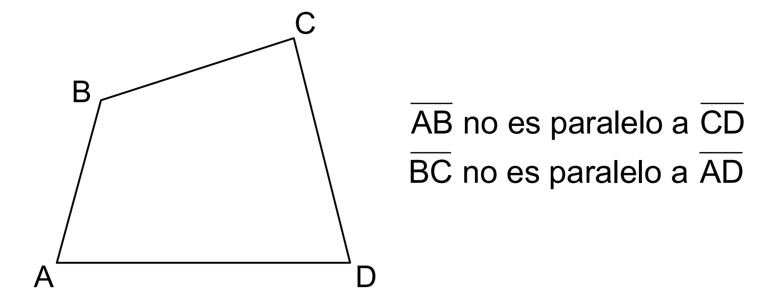
3. Dos ángulos de un cuadrilátero son opuestos, si no tienen en común un lado del cuadrilátero.
4. Dos ángulos de un cuadrilátero son consecutivos, si tienen común un lado del cuadrilátero.
5. Una diagonal de un cuadrilátero es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

De acuerdo al paralelismo de sus lados opuestos los cuadriláteros se clasifican en trapezoides, trapecios y paralelogramos.

I. TRAPEZOIDE

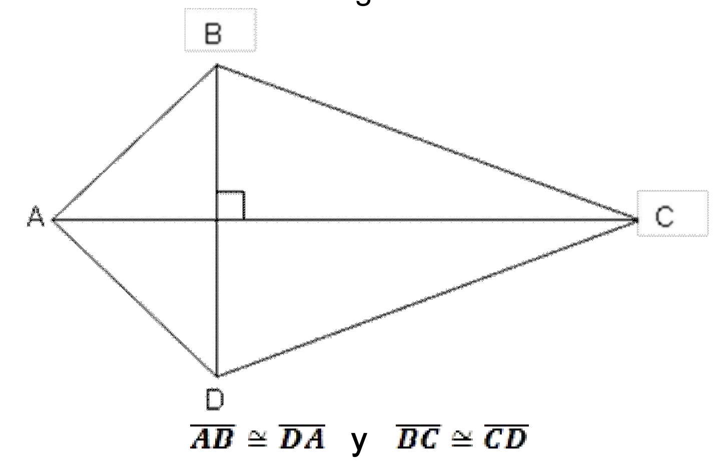
Es un cuadrilátero que no tiene lados opuestos paralelos.



$\overline{AB}$ no es paralelo a $\overline{CD}$

$\overline{BC}$ no es paralelo a $\overline{AD}$

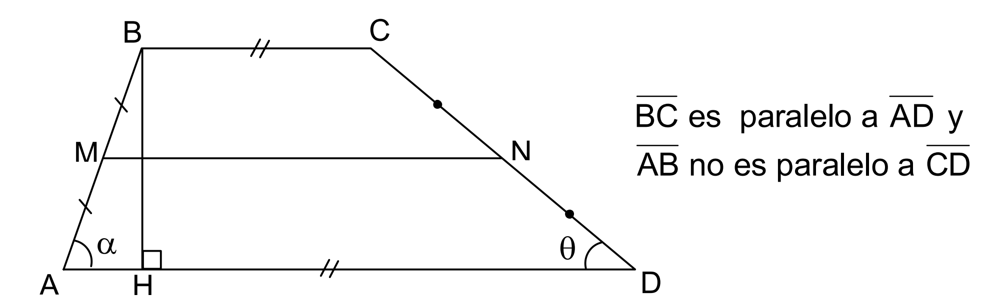
Trapezoide Simétrico: Llamado también trapezoide bisósceles, es aquel trapezoide que tiene dos pares de lados consecutivos congruentes.
La diagonal AC es mediatriz de la diagonal BD.



$\overline{AB} \cong \overline{DA}$ y $\overline{DC} \cong \overline{CD}$

II. TRAPECIO

Es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos.



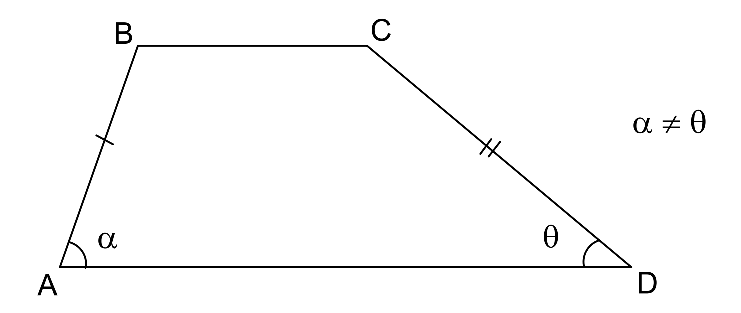
1. Los lados paralelos se llaman bases del trapecio tal como $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.
2. La altura del trapecio es el segmento perpendicular trazado desde un punto de una base a la otra base tal como $\overline{BH}$.
3. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio se llama mediana tal como $\overline{MN}$.

Clasificación

De acuerdo a la congruencia de sus lados opuestos no paralelos se clasifican en:

a) Trapecio escaleno

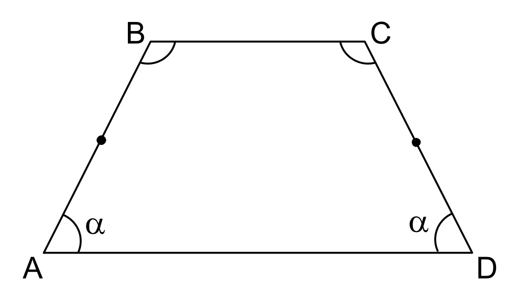
Es aquel trapecio cuyos lados opuestos no paralelos no son congruentes.



$\alpha \neq \theta$

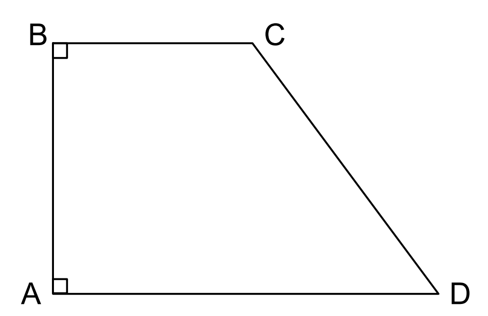
b) **Trapecio isósceles**

Es aquel trapecio cuyos lados opuestos no paralelos son congruentes.



OBSERVACIÓN

Un trapecio se llama trapecio rectángulo si uno de sus lados no paralelos es perpendicular a las bases.

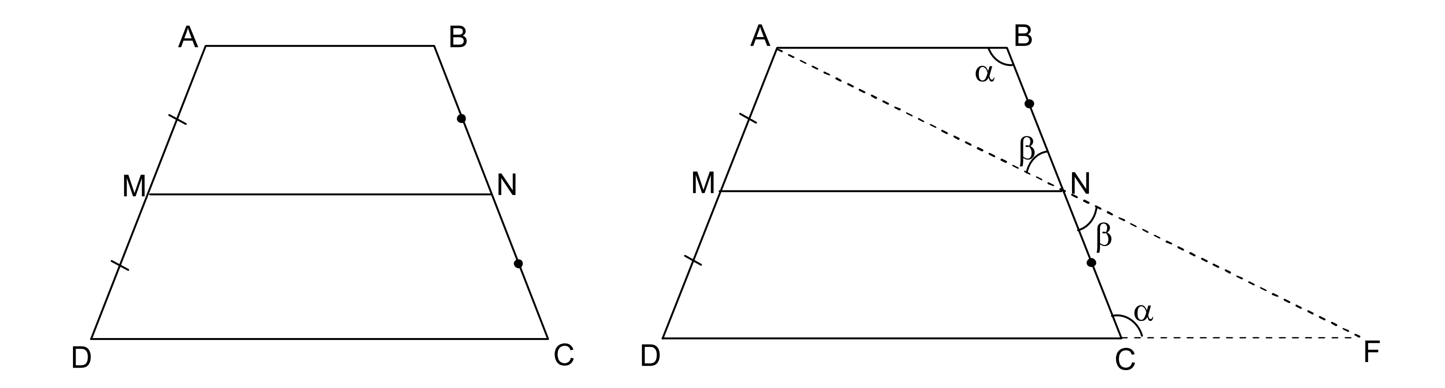


Teorema

La mediana de un trapecio es paralela a las bases y la longitud de la mediana es igual a la semisuma de las longitudes de las bases.

$$Hipótesis \begin{cases} Sea\ ABCD\ el\ trapecio(\overline{AB} // \overline{DC})\ y \\ \overline{MN}\ la\ mediana \end{cases}$$

$$Tesis \begin{cases} \overline{MN} // \overline{AB}\ y\ \overline{MN} // \overline{DC} \\ MN = \dfrac{AB + DC}{2} \end{cases}$$



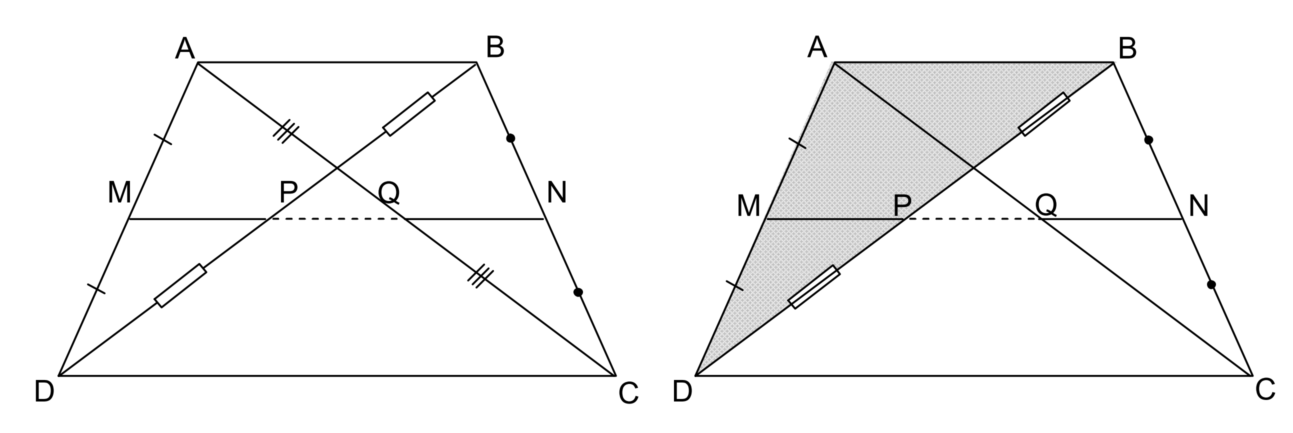
Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. Se prolongan $\overline{AN}$ y $\overline{DC}$ hasta que se intersequen en el punto F.	1. Trazos auxiliares
2. $\overline{BN} \cong \overline{CN}$	2. Por hipótesis
3. $m\angle BNA = m\angle CNF = \beta$	3. Ángulos opuestos por el vértice
4. $m\angle ABN = m\angle FCN = \alpha$	4. Ángulos alternos internos
5. $\Delta\ ABN \cong \Delta\ FCN$	5. Postulado ALA
6. Luego: $\overline{AN} \cong \overline{FN}$ $\overline{AB} \cong \overline{FC}$	6. Por ser lados correspondientes de triángulos congruentes
7. En el ΔADF : $\overline{MN} \,//\, \overline{DF}$	7. Porque $\overline{MN}$ une los puntos medios de dos lados del triángulo
8. Por tanto: $\overline{MN} // \overline{DC}$ y $\overline{MN} // \overline{AB}$	8. Por ser $\overline{DC}$ una parte de $\overline{DF}$ y además; dos rectas paralelas a una tercera recta son paralelas entre sí.
9. En el Δ DAF : $MN = \dfrac{DF}{2}$	9. Porque: $\overline{MN}$ une los puntos medios de dos lados del triángulo
10. $\Rightarrow MN = \dfrac{DC + CF}{2} \quad \therefore \quad MN = \dfrac{DC + AB}{2}$	10. Postulado de adición y sustitución.

Corolario

En un trapecio la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales es igual a la semidiferencia de las longitudes de las bases.

$$Hipótesis \left\{ \begin{array}{l} Sea\ ABCD\ el\ trapecio\ (\overline{AB} // \overline{DC})\ \ y\ \overline{PQ}\ \ el \\ segmento\ que\ une\ los\ puntos\ medios\ de\ las \\ diagonales\ \overline{BD}\ \ y\ \overline{AC} \end{array} \right\} \qquad Tesis \left\{ PQ = \frac{DC - AB}{2} \right\}$$



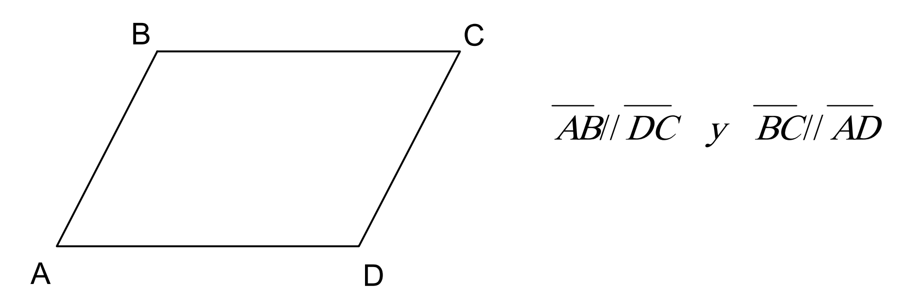
Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. En el Δ ABD: $MP = \frac{AB}{2}$ (I)	1. El segmento MP une los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$.
2. En el Δ ADC: $MQ = \frac{DC}{2}$ (II)	2. El segmento MQ une los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$
3. De la figura: PQ = MQ – MP (III)	3. Por axioma de la sustracción
4. Reemplazando (I) y (II) en (III)	4. Axioma de la sustitución

$$PQ = \frac{DC}{2} - \frac{AB}{2} \Rightarrow PQ = \frac{DC - AB}{2}$$

III. PARALELOGRAMO

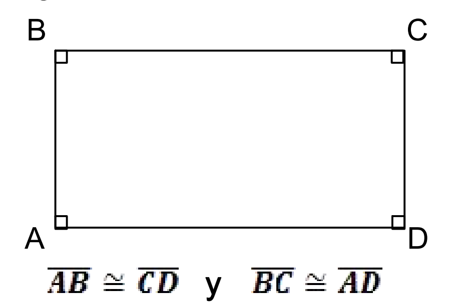
Es aquel cuadrilátero que tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos.



Clasificación

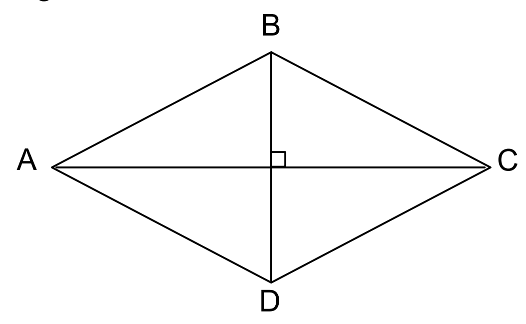
De acuerdo a la congruencia entre sus ángulos consecutivos y entre sus lados consecutivos se clasifican en:

a) **Rectángulo**: Es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes y cuyos lados consecutivos no son congruentes.



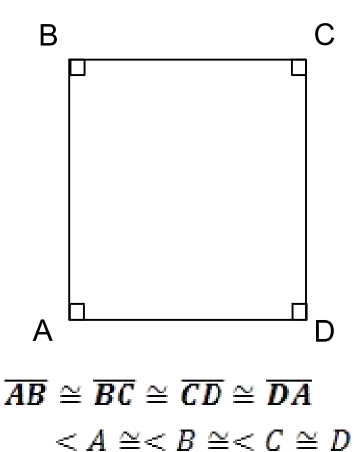
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

b) **Rombo**: Es un paralelogramo cuyos lados son congruentes y cuyos ángulos consecutivos no son congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

c) **Cuadrado:** Es un paralelogramo cuyos lados y ángulos son todos congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

$< A \cong < B \cong < C \cong D$

d) **Romboide**: Es aquel paralelogramo cuyos ángulos consecutivos y lados consecutivos no son congruentes.

TEOREMAS SOBRE PARALELOGRAMOS

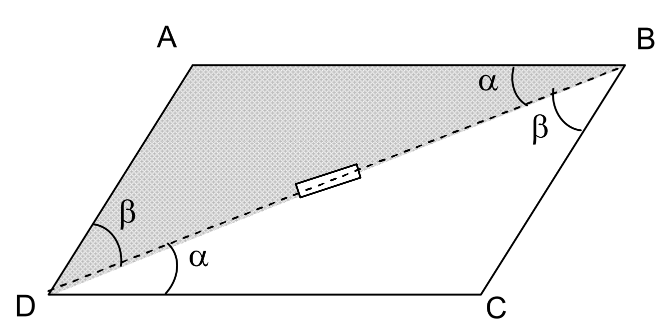
Teorema

En un paralelogramo, dos lados opuestos y dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.

Hipótesis $\begin{cases} \text{Sea el paralelogramo ABCD} \\ \overline{AB} // \overline{DC} \wedge \overline{AD} // \overline{BC} \end{cases}$

Tesis $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DC} \ \ y \ \ \overline{AD} \cong \overline{BC} \\ \angle \overline{BAD} \cong \angle DCB \ \ y \ \ \angle ADC \cong \angle CBA \end{cases}$

Demostración:



Afirmaciones	Razones
1. Tracemos la diagonal $\overline{BD}$	1. Trazo auxiliar
2. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	2. Todo segmento es congruente a sí mismo (propiedad reflexiva)
3. $m\angle BDC = m\angle DBA = \alpha$ $m\angle ADB = m\angle CBD = \beta$	3. Ángulos alternos internos entre paralelas
4. Luego, Δ BDA $\cong$ Δ ADBC	4. Postulado ALA
5. Y por consiguiente $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\angle BAD \cong \angle DCB$	5. Por los elementos correspondientes de triángulos congruentes
6. Finalmente: $\angle ADC \cong \angle CBA$	6. Postulado de la adición de ángulos.

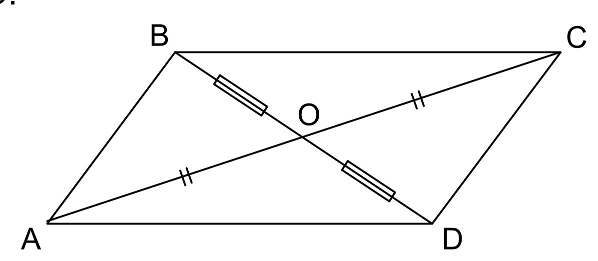
Teorema recíproco

Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (La demostración la dejamos como ejercicio para el lector).

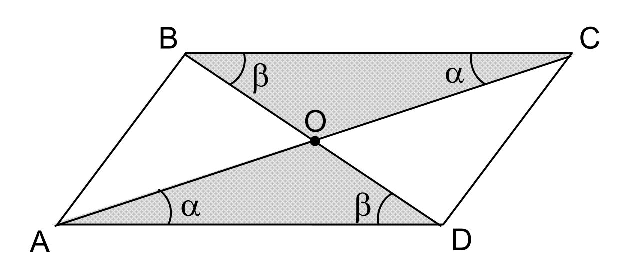
Teorema

Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Hipótesis $\begin{cases}\text{Sea un paralelogramo ABCD, cuyas}\\ \text{diagonales } \overline{AC} \text{ y } \overline{BD} \text{ se intersecan}\\ \text{en el punto O.}\end{cases}$ Tesis: $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{BO} \cong \overline{OD}$



Demostración:



Afirmaciones	Razones
1. $m\angle CAD = m\angle BCA = \alpha$ $m\angle CBD = m\angle BDA = \beta$	1. Por ser ángulos alternos internos
2. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	2. Por teorema anterior
3. Luego, Δ AOD $\cong$ Δ COB	3. Postulado ALA
4. Y por consiguiente: $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ y $\overline{OD} \cong \overline{OB}$	4. Por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes

Teorema

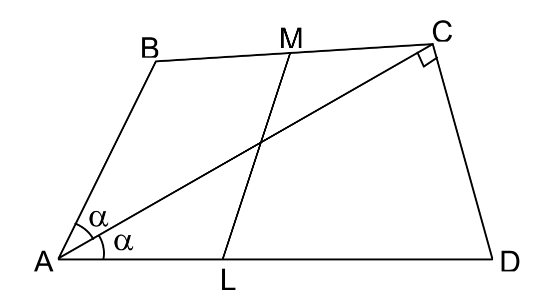
Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema

El segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de su longitud.

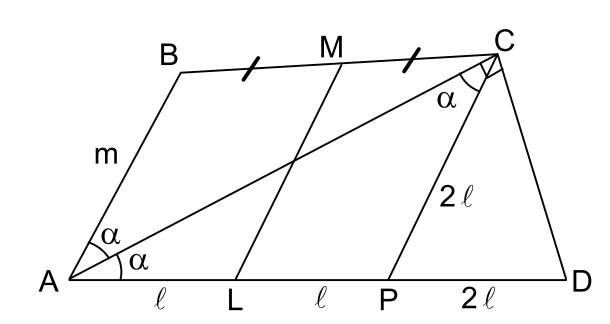
PROBLEMAS RESUELTOS – CUADRILÁTEROS

01. En el cuadrilátero ABCD mostrado, BM = MC, AD = 4AL, $\overline{AD}$ + 2AB = 18 m y $m\angle BAC = m\angle CAD$. Si $m\angle ACD = 90$, entonces la longitud de $\overline{ML}$ es



A) 3,5 cm
B) 4 cm
C) 4,5 cm
D) 5,5 cm
E) 6 cm

Solución:



Dato: $4\ell + 2m = 18$
$2\ell + m = 9$

* Se traza $\overline{CP}$: Mediana relativa a la hipotenusa en el triángulo rectángulo ACD.
* $\overline{AB}$ // $\overline{CP}$ entonces ABCP es un trapecio

$\overline{ML}$: mediana entonces

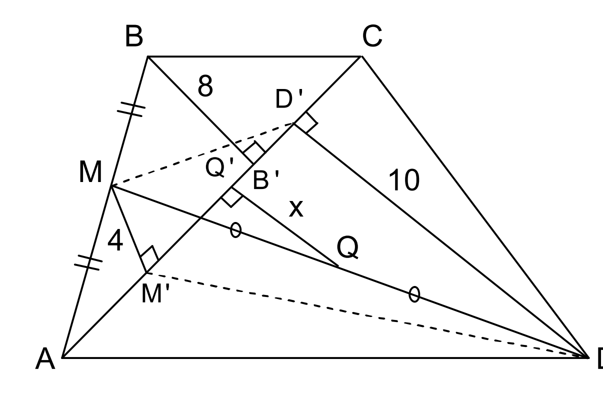
$$ML = \frac{2\ell + m}{2} = \frac{9}{2}$$

ML = 4,5 cm

02. En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, BC < AD. Se ubica M punto medio de $\overline{AB}$. Las distancias de B y D a $\overline{CA}$ son 8 cm y 10 cm. Calcule la distancia del punto medio de $\overline{MD}$ a $\overline{AC}$.

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm D) 4 cm E) 7 cm

Solución:

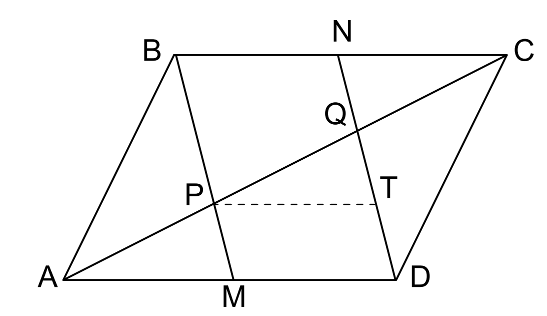


* $MM' = \frac{BB'}{2} = 4$

* Trapecio MD'DM'

$$x = \frac{10 - 4}{2} = 3$$

03. En un romboide ABCD se ubican los puntos medios M y N de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ intersecta a $\overline{BM}$ y $\overline{DN}$ en los puntos P y Q respectivamente. Si AQ = 12u, calcule la longitud de $\overline{QC}$.



Δ APM $\cong$ Δ CQN

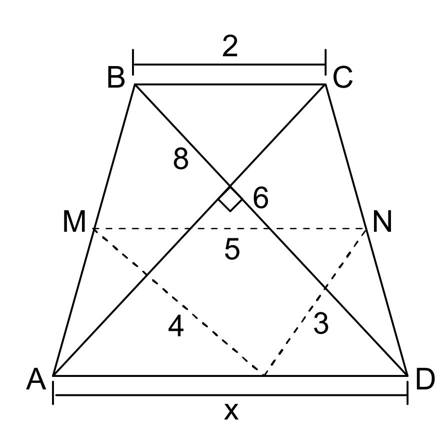
$\Rightarrow$ AP = QC

Δ PQT $\cong$ Δ CQN

$\Rightarrow$ AP = QC

$\Rightarrow$ QC = 6u

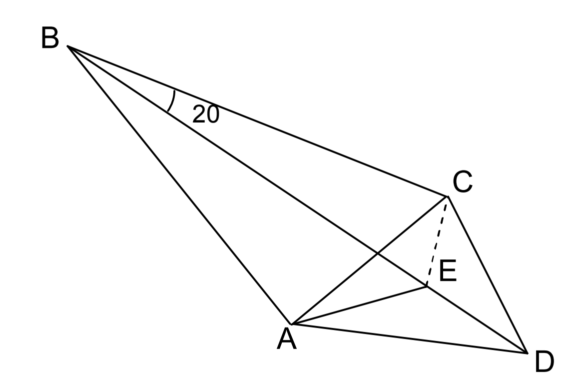
04. En un trapecio ABCD la base menor $\overline{BC}$ mide 2u, las diagonales son perpendiculares, y estás miden 6 y 8u. Calcular la longitud de la base mayor.



$$5 = \frac{2 + x}{2}$$

x = 8u

05. ABCD es un trapecio, se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. La bisectriz del $\angle$CAD intersecta a $\overline{BD}$ en el punto E. Si $m\angle BCE = 80$, $m\angle EBD = 20$, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ y BC + CD = 7u, calcular la longitud del segmento $\overline{BD}$.



BD = BE + ED

Δ EBC es isósceles

y $\overleftrightarrow{AE}$ es mediatriz de $\overline{CD}$.

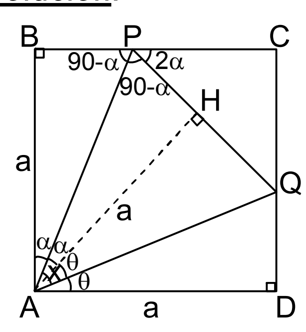
$\Rightarrow$ EC = ED

$\Rightarrow$ BD = 7u

01. Dado un cuadrado ABCD, en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y Q tal que $m\angle CPQ = 2(m\angle BAP)$. Calcule la $m\angle PAQ$.

A) 30 B) 37 C) 45 D) 53 E) 60

Solución:

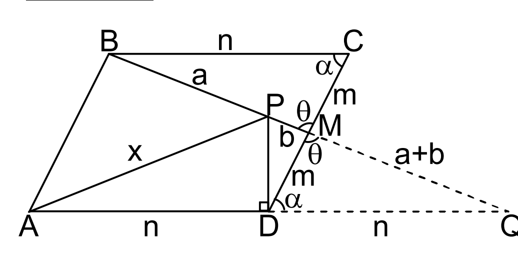


Se traza $\overline{AH} \perp \overline{PQ}$
T. Bisectriz: AB=AH=a
$m\angle HAQ = m\angle BAH = \alpha$
Como AH=AD=a entonces
$\overrightarrow{AQ}$: bisectriz del $\angle HAD$
Luego x=α+θ,
pero α+x+θ=90⇒x=45

02. En un romboide ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$ y en $\overline{BM}$ se ubica el punto P tal que $\overline{PD} \perp \overline{AD}$. Calcule AP si BP=a y PM=b.

A) a+b B) 2a+b C) a+2b D) 2a-b E) a-2b

Solución:

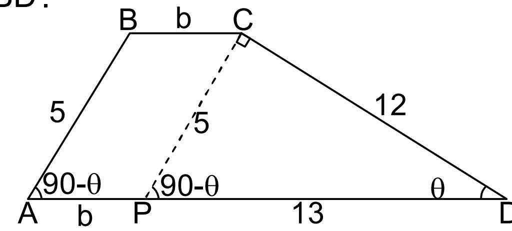


$\Delta DMQ \cong \Delta CMB \Rightarrow MQ = BM = a + b$

$DQ = BC = n$

T. Mediatriz: $x = a + 2b$

03. En un trapecio ABCD, de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, los ángulos A y D son complementarios, AB=5 y CD=12. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



Piden: $x = \dfrac{AD - BC}{2} \ldots (1)$

Se traza $\overline{PC} \,/\!/\, \overline{AB} \Rightarrow$ ABCD: romboide
AP=b y PC=5

ΔPCD: rectángulo ⇒ PD=13

En (1): $x = \dfrac{13 + b - b}{2} \Rightarrow x = 6,5$

PROBLEMAS PROPUESTOS – CUADRILÁTEROS

01. Indique el valor verdad de las siguientes proposiciones:

I. Todo paralelogramo equilátero es un cuadrado.

II. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares entre si, el cuadrilátero es un rombo.

III. Si un paralelogramo es un rectángulo, el rectángulo es un paralelogramo.

A) Solo I y II B) Solo II y III
C) Solo I D) Solo III
E) I, II y III

02. Se tiene el trapecio ABCD, $\overline{AB}//\overline{CD}$, en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio F, $\overline{AF}\cap\overline{BD}=\{E\}$, además $\overrightarrow{BC}\cap\overrightarrow{AF}=\{G\}$. Si $AE=4$, $EF=3$. Calcule FG

A) 21 B) 22
C) 23
D) 24 E) 28

03. En un paralelogramo ABCD, $AB=a$, $BC=b$, sea M un punto de $\overline{AC}$, se trazan $\overline{ME}\perp\overline{AB}$, $\overline{MF}\perp\overline{AD}$ ($E\in\overline{AB}$ y $F\in\overline{AD}$) siendo $ME=c$. Halle: MF

A) $\frac{ac}{b}$ B) $\frac{bc}{a}$
C) $\frac{ab}{c}$
D) $\frac{a+b+c}{3}$ E) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

04. Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica R punto medio de $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ es perpendicular a $\overline{BR}$ $\left(F\in\overline{BR}\right)$, calcule la distancia del centro del cuadrado al segmento BR.

A) $\frac{1}{3}AF$ B) $\frac{1}{4}AF$
C) $\frac{2}{3}AF$
D) $\frac{1}{2}AF$ E) $\frac{3}{4}AF$

05. En un trapecio ABCD, $\overline{BC}//\overline{AD}$, $BC<AD$. Se ubica M punto medio de $\overline{AB}$. Las distancias de B y D a $\overline{CA}$ son 8 y 10. Calcule la distancia del punto medio de $\overline{MD}$ a $\overline{AC}$.

A) 1 B) 2
C) 3
D) 4 E) 7

06. En un paralelogramo ABCD, por el vértice A se traza una recta que intersecta a la prolongación del lado $\overline{DC}$ en el punto N. La altura $\overline{DH}$ ($H\in\overline{AB}$) del paralelogramo intersecta a $\overline{AN}$ en el punto M. Si $m\angle DAN=2m\angle BAN$ y $BC=18$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{MN}$ es

A) 18 B) 27
C) 36
D) 48 E) 56

07. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si las diagonales de un cuadrilátero convexo son perpendiculares y congruentes, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.

II. Si las diagonales de un trapecio son congruentes, entonces el trapecio es isósceles.

III. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

A) VVV B) VFV
C) FVF
D) FVV E) FFF

08. En un trapecio ABCD ($\overline{AB} // \overline{CD}$), las bisectrices interiores de los ángulos A y D se intersectan en el punto P y las bisectrices interiores de los ángulos C y B se intersectan en el punto Q. Si $AD + BC = 15$ u y $AB + CD = 12$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{PQ}$ es:

A) 0,5 B) 1
C) 1,5
D) 2 E) 3

09. En un trapecio ABCD ($\overline{AB} // \overline{CD}$), M y N son puntos medios $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$. Si $AB + CD = \ell$, entonces la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ es

A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell}{3}$
C) $\frac{\ell}{4}$
D) $\frac{\ell}{5}$ E) $\frac{\ell}{6}$

10. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
II. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares y congruentes, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.
III. Ningún polígono tiene 3 vértices colineales.

A) FFF B) VFV
C) VFF
D) FVV E) VVV

11. En un triángulo ABC, sus lados miden $AB = 13$u, BC=12u y AC=7u. Desde el vértice B, se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ a las bisectrices de los ángulos BAC y BCA, respectivamente. Entonces, la longitud (en u) de $\overline{PQ}$ es

A) 8 B) 9
C) 10
D) 11 E) 12

12. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un cuadrilátero convexo es un trapecio isósceles si y solo sí sus diagonales son congruentes.
II. Un cuadrilátero convexo no es un paralelogramo si y solo sí sus diagonales no se bisecan.
III. Un cuadrilátero convexo es un trapezoide simétrico.

A) VVV B) FVV
C) FVF
D) VFV E) FFF

13. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un trapezoide simétrico es un polígono convexo.
II. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.
III. Si en un trapezoide convexo se unen los puntos medios de dos lados opuestos con los puntos medios de las diagonales, se forma un paralelogramo.
IV. Al unir los puntos medios de los cuatro lados de un trapecio isósceles se forma un rombo.

A) FVFV B) VVVV
C) FVVV
D) FFVV E) VVFF

14. Dadas las siguientes proposiciones:
    I. Un trapecio es inscriptible.
    II. El cuadrilátero cuyos vértices son 2 vértices de un triángulo y los pies de las alturas trazadas desde dichos vértices, es un cuadrilátero inscriptible.
    III. Si en una circunferencia se trazan 2 cuerdas congruentes y secantes, entonces los extremos de dichas cuerdas son los vértices de un trapecio isósceles.

    Indique cuál (es) son verdaderas

    A) I, II y III B) II y III
    C) I y II
    D) I y III E) Solo III

15. En las siguientes proposiciones cuáles son verdaderas y/o falsos
    I. Las diagonales del rombo son bisectrices de sus ángulos.
    II. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan el cuadrilátero es un paralelogramo.
    III. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.
    IV. Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

    A) VVVV B) VVVF
    C) VVFF
    D) VFFF E) FFFF

16. Indique el valor de verdad de:
    I. Si en un cuadrilátero las bisectrices de los ángulos opuestos son paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
    II. En un trapecio una diagonal puede bisecar a la otra diagonal.
    III. Si en un polígono regular todas sus diagonales son congruentes, entonces el polígono es un cuadrado.

    A) FFF B) VVV
    C) VFF
    D) VFV E) FFV

Bibliografía

1. Encyclopedia Británica Inc., Benton, W., Publisher (1952). The thirteen Books of Euclid's elements. 1st edition. Editorial Encyclopedia Británica. The United States of America.

2. Moise, E. (1964). Elementary Geometry. 1ª edición. Editorial Addison Wesley publishing company Inc. The United States of America.

3. Helfgott, M. (1992). Geometría Plana. Editorial Escuela Activa S.A. Lima – Perú

4. Vega, F. (1961). Matemática Moderna 4. Editorial Colegio Militar Leoncio Prado. Lima – Perú